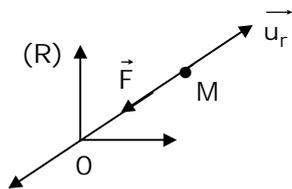


MOUVEMENTS A FORCE CENTRALE FONCTION DE LA DISTANCE

Plan (Cliquez sur le titre pour accéder au paragraphe)

I.	Propriétés générales.....	1
II.	Cas d'une force $\vec{F} = -k \vec{OM}$, $k = \text{cste}$	3
III.	Cas d'une force « newtonienne » $\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r$:	4

Dans un référentiel (R) galiléen, on considère un point M soumis à une force :



$$\vec{F} = F(r) \vec{u}_r$$

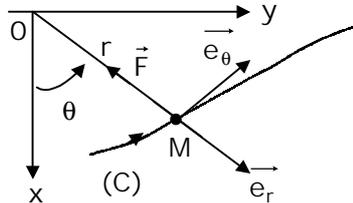
- $F(r) > 0$: force répulsive
- $F(r) < 0$: force attractive

I. Propriétés générales.

Un mouvement à force centrale est aussi un mouvement à accélération centrale. Les propriétés cinématiques ont donc été vues en II.

- La trajectoire est plane.

Dans le plan Oxy, on repère M par ses coordonnées polaires (r, θ).



$$\vec{F} = F(r) \vec{e}_r$$

- Le mouvement obéit à la loi des aires :

$$\boxed{r^2 \dot{\theta} = C} \quad , \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} C}$$

Rem.: la loi des aires correspond à la conservation du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad \boxed{\vec{\sigma}(O) = mr^2 \dot{\theta} \vec{z} = \text{cste}}$$

- Formules de Binet

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m c^2 \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right) \\ F(r) = m a_r = - m c^2 u^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \end{cases} \quad \left(u = \frac{1}{r} \right)$$

En dynamique, on peut rajouter la propriété suivante :

- $\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}} E_p$ dérive d'une énergie potentielle $E_p(r)$ telle que :

$$\frac{dE_p}{dr} = - F(r) \Rightarrow \boxed{E_p(r) = - \int F(r) dr}$$

Le système est donc conservatif : $E_m = \text{cste}$

L'étude du mouvement se fait, en général, (sauf en 7.2) en coordonnées polaires.

On peut s'intéresser aux lois $r(t)$, $\theta(t)$ et $r(\theta)$ (équation polaire de la trajectoire).

- Détermination de $r(t)$ et $\theta(t)$

On peut utiliser la RFD ou la conservation de l'énergie mécanique :

$$\bullet \quad \vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} F(r) = m \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right) \\ r^2 \dot{\theta} = C \end{cases}$$

En éliminant $\dot{\theta}$, on obtient une équation différentielle sur $r(t)$ (pas toujours simple à résoudre !).

$$\bullet \quad E_m = \text{cste } E_0 \Rightarrow \begin{cases} E_0 = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + E_p(r) \\ r^2 \dot{\theta} = C \end{cases}$$

Là encore, l'élimination de $\dot{\theta}$ conduit à une intégrale 1^{ère} de l'énergie de la variable $r(t)$.

- Détermination de l'équation polaire de la trajectoire $r(\theta)$:

Il est alors judicieux d'utiliser les formules de Binet :

$$\begin{cases} F(r) = - mc^2 u^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \\ E_p(r) + \frac{1}{2} mc^2 \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right) = E_0 \end{cases}$$

On obtient ainsi une équation différentielle sur $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$.

Rem. : E_0 et C sont données par les conditions initiales, ou les valeurs de r et \vec{v} en un point donné de la trajectoire (par exemple pour une planète du système solaire).

II. Cas d'une force $\vec{F} = -k \vec{OM}$, $k = \text{cste}$.

Alors :

$$F(r) = \begin{cases} kr \\ E_p(r) = \frac{1}{2} kr^2 + \text{cste} \end{cases}$$

II.1. Cas ou $k > 0$: force attractive.

En projection sur (\vec{x}, \vec{y}) , la RFD donne :

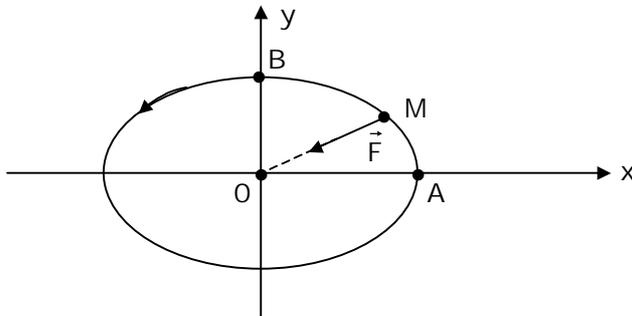
$$\begin{cases} m \ddot{x} = -kx \\ m \ddot{y} = -ky \end{cases}, \text{ soit :}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \end{cases}, \text{ si } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Il s'agit de l'oscillateur harmonique bidimensionnel :

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ y(t) = B \cos(\omega_0 t + \psi) \end{cases}$$

La trajectoire est une ellipse de centre O, décrite selon la loi des aires.



$$(\varphi - \psi = \pi/2)$$

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$$

Pour $\varphi - \psi = 0$ (II), cette ellipse se réduit à une droite.

II.2. Cas ou $k < 0$: force répulsive.

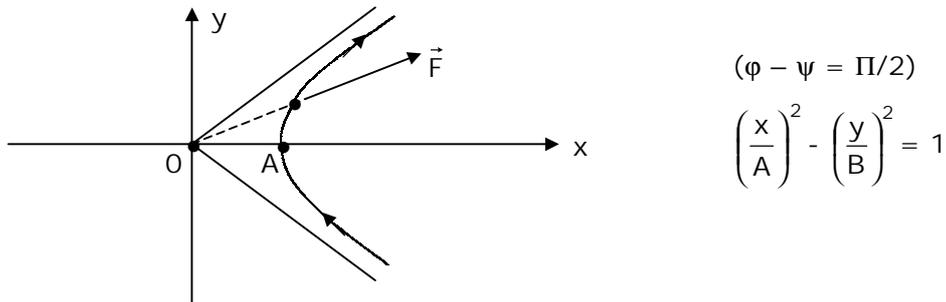
On a cette fois :

$$\begin{cases} \ddot{x} - \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} - \omega_0^2 y = 0 \end{cases}, \text{ si } \omega_0^2 = -\frac{k}{m} > 0$$

Donc :

$$\begin{cases} x(t) = A \text{ch}(\omega_0 t + \varphi) \\ y(t) = B \text{ch}(\omega_0 t + \psi) \end{cases}$$

La trajectoire est donc une branche d'hyperbole de centre O, décrite selon la loi des aires :



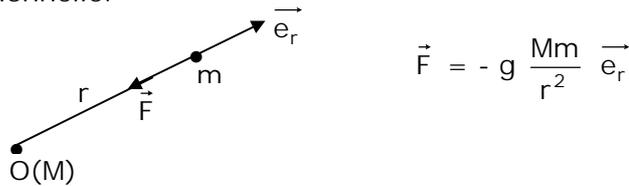
$$(\phi - \psi = \pi/2)$$

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 - \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$$

III. Cas d'une force newtonienne » $\vec{F} = - \frac{k}{r^2} \vec{e}_r$:

$F(r) = - \frac{k}{r^2}$ $E_p(r) = - \frac{k}{r} + \text{cste}$	$\left\{ \begin{array}{l} k > 0 : \text{attraction} \\ k < 0 : \text{répulsion} \end{array} \right.$
---	--

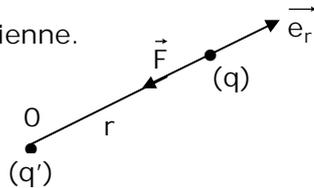
Ex. : - Force gravitationnelle.



$$\vec{F} = - g \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r$$

$$k = + g Mm > 0 \text{ (attraction)}$$

- Force coulombienne.



$$\vec{F} = \frac{qq'}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \text{ (dans le vide)}$$

Donc

$$k = - \frac{qq'}{4 \pi \epsilon_0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} qq' > 0 : \text{force répulsive} \\ qq' < 0 : \text{force attractive} \end{array} \right.$$

III.1. Equation polaire de la trajectoire.

On peut utiliser une méthode dynamique et la 2^e formule de Binet :

$$F(r) = - \frac{k}{r^2} = - k u^2 = - mc^2 u^2 \left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2} \right)$$

On en déduit l'équation différentielle sur $u(\theta)$, linéaire du 2^e ordre à coefficients constants :

$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{mc^2}$

La solution est : $u = A \cos (\theta - \theta_0) + \frac{k}{mc^2}$

En posant $\theta' = \theta - \theta_0$ (rotation d'axe), et en prenant $A > 0$ (ce qui est toujours possible par un choix adéquat de θ_0), on a donc :

$$r(\theta') = \frac{1}{\frac{k}{mc^2} + A \cos \theta'}$$

Il s'agit de l'équation polaire d'une conique, dont le centre des forces O est un foyer.

III.2. Cas de la force répulsive : $k < 0$.

On peut alors écrire :

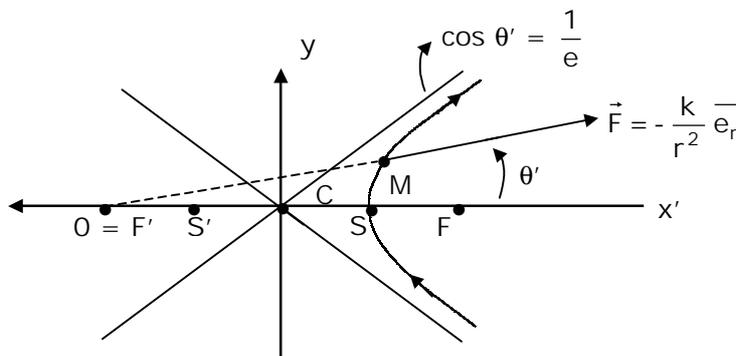
$$r(\theta') = \frac{\left(\frac{mc^2}{-k} \right)}{-1 + A \left(\frac{mc^2}{-k} \right) \cos \theta'}$$

Soit :

$$\boxed{r(\theta') = \frac{p}{-1 + e \cos \theta'}} \quad \begin{cases} p = \frac{mc^2}{-k} > 0 \\ e = Ap > 0 \end{cases}$$

p est le paramètre de la conique, e son excentricité.

Si $e < 1$, r serait négative, ce qui est exclu. Donc $e > 1$ et la trajectoire est une branche d'hyperbole (la branche la plus « éloignée » du centre des forces).



$$(p = \frac{b^2}{a} = a(e^2 - 1) : a = \frac{SS'}{2} ; e = \frac{c}{a} ; c = \frac{FF'}{2})$$

III.3. Cas de la force attractive : $k > 0$.

On écrit cette fois :

$$r(\theta') = \frac{\frac{mc^2}{k}}{1 + \left(A \frac{mc^2}{k} \right) \cos \theta'}$$

Soit :

$$r(\theta') = \frac{p}{1 + e \cos \theta'} \quad \begin{cases} p = \frac{mc^2}{k} \\ e = Ap \end{cases}$$

On ne peut cette fois, a priori, déterminer la nature de la conique.

Montrons qu'elle ne dépend que de l'énergie initiale E_0 du point M :

$$E(t) = E_0 = \text{cste} = E_C + E_p$$

On calcule E_C grâce à la 1^{ère} formule de Binet.

$$E_C = \frac{1}{2} mc^2 \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right) \quad \left(\frac{du}{d\theta} = \frac{du}{d\theta'} \right)$$

Avec

$$\begin{cases} u(\theta') = \frac{1 + e \cos \theta'}{p} \\ \frac{du}{d\theta'} = -\frac{e}{p} \sin \theta' \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_C = \frac{1}{2} \frac{mc^2}{p^2} (1 + e^2 + 2e \cos \theta')$$

Et :

$$E_p(r) = -\frac{k}{r} = -ku = -\frac{k}{p} (1 + e \cos \theta')$$

Comme $mc^2 = kp$, on tire :

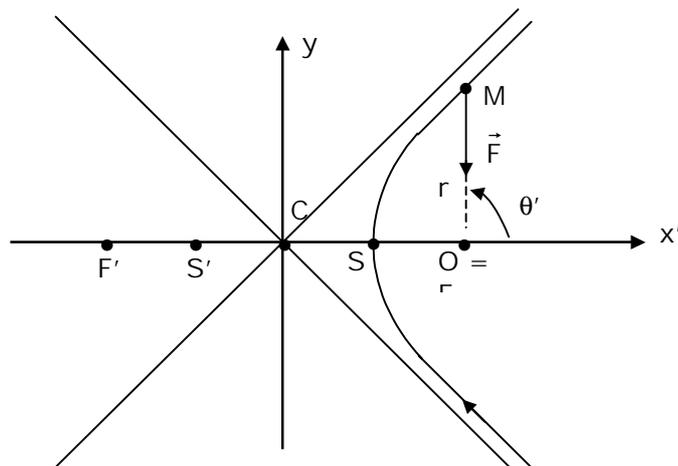
$$E_0 = \frac{1}{2} \frac{k}{p} (1 + e^2 + 2e \cos \theta') - \frac{k}{p} (1 + e \cos \theta')$$

Soit :

$$E_0 = \frac{1}{2} \frac{k}{p} (e^2 - 1)$$

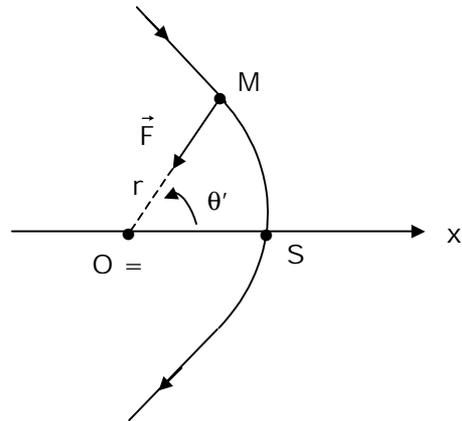
On voit donc que la nature de la conique dépend du signe de l'énergie.

- si $E_0 > 0$: $e > 1$,
et la trajectoire est une branche
d'hyperbole (la branche décrite
est alors la plus proche
du centre des forces).



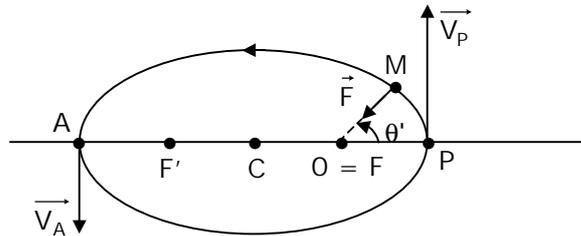
MOUVEMENTS A FORCE CENTRALE FONCTION DE LA DISTANCE

- Si $E_0 = 0$, $e = 1$,
la trajectoire est une parabole.



$$r = \frac{p}{1 + \cos \theta'} \quad ; \quad r_{\min} = SF = \frac{p}{2}$$

- Si $E_0 < 0$, $e < 1$,
la trajectoire est une ellipse
(et un cercle pour $e = 0$, $E_0 = -\frac{k}{2p}$).



$$\begin{cases} p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2) & ; & a = \frac{AP}{2} & ; & e = \frac{c}{a} & ; & c = \frac{FF'}{2} \\ r_{\min} = r_P = a(1 - e) & & r_{\max} = r_A = a(1 + e) \end{cases}$$

(P périhélie ; A aphélie)

Rem. : $C = r^2 \dot{\theta} = r \times r \dot{\theta} = r V_\theta$ (cste des aires)

Donc, aux points P et A : $r_P V_P = r_A V_A$

Ainsi : $V_A = V_{\min}$ et $V_P = V_{\max}$, avec :

$$\frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{r_A}{r_P} = \frac{1+e}{1-e}$$

III.4. Cas de la trajectoire elliptique $\begin{pmatrix} k > 0 \\ E_0 < 0 \end{pmatrix}$

A partir de la donnée de E_0 et de C, on cherche à déterminer les caractéristiques de l'ellipse : a, b et la période T.

- Demi-grand axe : $p = a(1 - e^2)$

Or : $E_0 = \frac{1}{2} \frac{k}{p} (e^2 - 1)$, donc ;

$$a = -\frac{k}{2E_0}$$

- Demi-petit axe : $b^2 = ap = \frac{amc^2}{k}$

Soit :
$$b^2 = -\frac{mc^2}{2E_0}$$

- Période : on utilise la loi des aires

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} C \Rightarrow S = \Pi ab = \frac{1}{2} CT \quad (\text{aire balayée pendant une période})$$

Ainsi :
$$T^2 = \frac{4 \Pi^2 a^2 b^2}{C^2} = \frac{4 \Pi^2 a^3 p}{C^2} = \frac{4 \Pi^2 a^3 m}{k}$$

Donc :
$$T = 2 \Pi \sqrt{\frac{ma^3}{k}}$$

On obtient ainsi la généralisation de la 3^e loi de Kepler : T^2 est proportionnelle à a^3 .

III.5. Cas de la trajectoire circulaire $\begin{cases} k > 0 \\ E_0 < 0 \\ e = 0 \end{cases}$

Alors : $r = r_0 = \text{cste}$, donc :

$$E_p = -\frac{k}{r_0} = \text{cste}$$

Or : $E_m = -\frac{k}{2r_0} = \text{cste}$

Donc : $E_c = E_m - E_p = -E_m = \frac{k}{2r_0} = \text{cste}$: le mouvement circulaire est uniforme.

Rem. : la loi des aires $r^2 \dot{\theta} = C$ donne aussi immédiatement ce résultat : $r = r_0 = \text{cste}$, donc $\dot{\theta} = \text{cste}$.

De plus : $E_c = \frac{1}{2} mv_0^2$

On a donc :
$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{mr_0}}$$

On retrouve alors :
$$T = \frac{2 \Pi r_0}{v_0} = 2 \Pi \sqrt{\frac{mr_0^3}{k}}$$

Rem. : tous ces résultats peuvent aussi être retrouvés par application de la RFD, dans le référentiel d'étude galiléen, en projection sur la base du trièdre de Frenet.